

Convection thermique pour un fluide de Herschel–Bulkley dans la région d’entrée d’une conduite

C. NOUAR, R. DEVIENNE et M. LÉBOUCHE

Laboratoire d’Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée, C.N.R.S., URA No. 875,
Université de Nancy I, 2 Avenue de la forêt de Haye, 54504 Vandoeuvre-les-Nancy Cedex, France

(Reçu 22 février 1993 et sous forme finale 20 juillet 1993)

Résumé—La convection thermique pour un fluide de Herschel–Bulkley, dans la région d’entrée d’une conduite, est étudiée par voie théorique dans le cas de propriétés physiques constantes, et par voie expérimentale à partir des mesures de vitesse et des températures de paroi. Les résultats de l’analyse théorique montrent que la correction du nombre de Nusselt due à la modification du cisaillement pariétal varie essentiellement suivant l’indice de structure n et le nombre de Herschel–Bulkley Hb . Les mesures de vitesse, en situation isotherme et en situation de chauffage, mettent en évidence l’incidence du champ thermique sur la structure de l’écoulement. Elle est caractérisée par une augmentation du gradient pariétal de vitesse et de la dimension de la zone plastique. Les relevés des températures de paroi permettent d’étudier le transfert de chaleur local. Finalement, une corrélation est proposée prenant en compte la modification du cisaillement pariétal par les propriétés rhéologiques et le caractère thermodépendant des fluides utilisés.

1. INTRODUCTION

NOUS ASSISTONS ces dernières années à intérêt croissant en faveur des caractéristiques du transfert de chaleur, pour les fluides non-Newtoniens. Ceci est dû essentiellement à l’extension des domaines d’intérêt des industries chimiques (huiles, peintures, graisses, plastiques, etc . . .) et agro-alimentaires (chocolat, sauces, gélifiés, etc . . .). Ces produits nécessitent à divers stades de leur utilisation ou pour leur transformation, des traitements thermiques variés (réchauffage, refroidissement).

Le traitement thermique de ces produits exige l’emploi d’échangeurs de chaleur dont la conception dépend essentiellement du fluide traité. Le dimensionnement de ces échangeurs ne peut être fait que si les lois d’écoulement et de transfert thermique tenant compte des variations du comportement du produit avec la température, des champs dynamique et thermique et de leur interaction sont connues.

Le problème de la convection thermique pour les fluides non-Newtoniens, en régime dynamique établi et à propriétés physiques constantes fut le cas le plus étudié. Parmi les travaux relatifs à ce sujet, on citera ceux effectués par Lyche et Bird [1], Whiteman et Drake [2], Pigford [3], et Kutateladze *et al.* [4] dans le cas des fluides pseudoplastiques, Hirai [5], et Wissler et Schechter [6] dans le cas des fluides de Bingham.

D’autres auteurs ont considéré le cas du développement simultané des couches limites dynamique et thermique, tels que Lin et Shah [7] pour les fluides du type Herschel–Bulkley, et Chandrupatla et Sastri [8], pour les fluides pseudoplastiques. Cependant, pour les fluides agro-alimentaires, le nombre de Prandtl est très élevé, la longueur d’établissement dynamique devient négligeable devant la longueur d’établissement ther-

mique. Par conséquent, le problème thermique peut être résolu dans la majorité des situations industrielles, en considérant le régime dynamique établi à partir de la section d’entrée.

Dans le cas où la variation des propriétés physiques du fluide avec la température, plus particulièrement la viscosité ou la consistance est prise en considération, des corrections du nombre de Nusselt, par rapport au cas où ces propriétés physiques sont supposées constantes, ont été proposées. Ces corrections apparaissent dans des diagrammes ou dans des corrélations sous forme d’un facteur correctif. Ainsi, dans le cas des fluides pseudoplastiques et pour un chauffage à température constante, le facteur correctif, $(Nu_{vp,n}/Nu_{cp,n})$, a pour expression selon Metzner *et al.* [9], $(K_m/K_p)^{0.14}$ où K_p et K_m sont les consistances calculées respectivement à la température de paroi et à celle de mélange. Mckillop *et al.* [10], pour les fluides pseudoplastiques et Forrest et Wilkinson [11], pour les fluides du type Herschel–Bulkley, fournissent des diagrammes donnant le nombre de Nusselt en fonction des différentes grandeurs adimensionnelles, en prenant en considération la thermodépendance du fluide à travers le rapport des viscosités (consistances) évaluées respectivement à la température d’entrée et à la température pariétale.

Si le chauffage est à flux constant et dans le cas des fluides pseudoplastiques, Mizuschina *et al.* [12] proposent l’expression suivante du facteur correctif

$$\frac{Nu_{vp,n}}{Nu_{cp,n}} = \left(\frac{K_m}{K_p} \right)^{0.1/n^{0.7}}$$

Joshi et Bergles [13, 14] ont introduit un nombre adimensionnel, $(b\phi_p D/2\lambda)$, qui rend compte de la thermodépendance du fluide et proposent une expression du facteur correctif de la forme :

NOMENCLATURE

a	dimension relative du corps plastique	R	rayon de la conduite [m]
b	coefficient intervenant dans la loi de variation de K avec la température $K = K_0 \exp(-bT)$	R_c	rayon du corps plastique [m]
C_p	chaleur spécifique à pression constante [J kg ⁻¹ °C ⁻¹]	Re_g	nombre de Reynolds généralisé
D	diamètre de la conduite [m]	T_e	température d'entrée [°C]
h	coefficient d'échange thermique [W m ⁻² °C ⁻¹]	T_f	température de film, $(T_p + T_m)/2$ [°C]
Hb	nombre d'Herschel-Bulkley	T_m	température de mélange [°C]
K	indice de consistance [Pa s ^{n}]	T_p	température de paroi [°C]
m	inverse de l'indice de structure, $1/n$	u	vitesse axiale [m s ⁻¹]
n	indice de structure apparaissant dans la loi $\tau = \tau_s + K\dot{\gamma}^m$	U	vitesse axiale adimensionnelle
Nu	nombre de Nusselt local	U_d	vitesse débitante [m s ⁻¹]
$Nu_{cp,n}$	nombre de Nusselt pour un fluide pseudoplastique à propriétés physiques constantes	X^*	nombre de Caméron, $(2z/D) Pe$
$Nu_{vp,n}$	nombre de Nusselt pour un fluide pseudoplastique à propriétés physiques variables	z	position axiale [m].
P	Pression [Pa]		
Pe	nombre de Peclet, $\rho C_p D U_d / \lambda$		
Pr_s	nombre de Prandtl pour un fluide à seuil.		
	$\frac{KC_p}{4\lambda} \left(\frac{2U_d}{D}\right)^{n-1} \frac{Hb}{a}$		

Symbols grecs

$\dot{\gamma}$	gradient de vitesse [s ⁻¹]
Λ^*	gradient pariétal de vitesse rapporté à celui obtenu pour un fluide Newtonien à même débit
η	position radiale adimensionnelle
θ	température adimensionnelle, $(T - T_e) / (\phi_p D / \lambda)$
λ	conductivité thermique [W m ⁻¹ °C ⁻¹]
ρ	masse volumique [kg m ⁻³]
τ	contrainte dans le fluide [Pa]
τ_s	contrainte seuil [Pa]
τ_p	contrainte pariétale [Pa]
ϕ_p	densité de flux de chaleur pariétale [W m ⁻²].

$$\frac{Nu_{vp,n}}{Nu_{cp,n}} = \frac{1}{\left(\frac{Nu_{cp,n}}{Nu_{vp,n}}\right)_e \left\{ 1 + \left[\frac{(Nu_{vp,n}/Nu_{cp,n})_e}{(Nu_{vp,n}/Nu_{cp,n})_e} \right]^{30} \right\}^{1/30}}$$

avec

$$\left(\frac{Nu_{vp,n}}{Nu_{cp,n}}\right)_e = \left(\frac{K_m}{K_p}\right)^{0,58 - 0,44n}$$

$$\left(\frac{Nu_{vp,n}}{Nu_{cp,n}}\right)_e = 1 + (0,1232 - 0,0542n)(b\phi_p D / 2\lambda) - (0,0101 - 0,0068n)(b\phi_p D / 2\lambda)^2.$$

Les indices (e) et (∞) correspondent respectivement à la région d'entrée thermique, et à la région où le régime thermique est établi.

Kahine *et al.* [15], proposent pour les fluides pseudoplastiques, une expression plus commode d'utilisation :

$$\frac{Nu_{vp,n}}{Nu_{cp,n}} = (b\phi_p D / 2\lambda)^{0,14n^{0,7}}.$$

Cette dernière expression, d'origine numérique, est en accord avec les résultats obtenus par El-Ouardighi [16], et Scirocco *et al.* [17] en conduite cylindrique,

NoUAR *et al.* [18] en conduite annulaire et Sourlier [19] en conduite rectangulaire.

Dans le cas des fluides présentant un seuil d'écoulement, nous ne pouvons citer que les travaux récents de Naïmi *et al.* [20] qui, dans le cas d'une géométrie annulaire, trouvent un exposant du groupe-ment adimensionnel $(b\phi_p D / 2\lambda)$ égal à 0,1 pour un écoulement de Poiseuille et égal à 0,16 lorsque la dimension de la zone plastique a été fortement réduite par la rotation du cylindre intérieur. Enfin, Moudachirou [21] trouve par voie numérique un facteur correctif de la forme :

$$\frac{Nu_{vp,n}}{Nu_{cp,n}} = 1 + \left[\frac{b\phi_p D}{2\lambda} \right]^{0,8(0,555 + 0,013X^*)}$$

Cette étude bibliographique montre que le nombre de travaux consacrés aux fluides à seuil est très restreint. En outre, l'incidence du seuil d'écoulement sur la thermodépendance et par suite sur le coefficient local de transfert de chaleur n'est pas encore bien définie.

Dans le présent article, nous étudions le problème du transfert de chaleur pour une densité de flux constante à la paroi, pour des fluides dont le comportement rhéologique peut être décrit par une loi du type : $\tau = \tau_s + K\dot{\gamma}^m$ (Herschel-Bulkley).

La première partie de cet article donne les caractéristiques non-Newtoniennes d'écoulement de ces fluides. Deux diagrammes sont fournis, l'un relatif à la dimension du corps plastique, l'autre au gradient pariétal de vitesse qui intervient directement sur la valeur de la conductance à la paroi. Ensuite, l'équation de l'énergie est résolue par une méthode aux différences finies. Le régime dynamique est supposé établi et les propriétés physiques constantes. Les résultats permettent de déterminer le facteur correctif qui tient compte de la modification du cisaillement pariétal et qui sera utilisé pour établir des corrélations liant le nombre de Nusselt à d'autres grandeurs adimensionnelles.

La deuxième partie de l'article présente le fluide de travail et décrit le montage expérimental utilisé.

Enfin, la troisième partie est relative aux résultats expérimentaux. Ils mettent en évidence l'interaction entre les champs dynamique et thermique. Une interprétation de l'effet de la thermodépendance suivant les propriétés rhéologiques est proposée. Une corrélation liant le nombre de Nusselt local au nombre de Caméron (X^+), prenant en considération le comportement rhéologique et sa thermodépendance, est donnée.

2. ANALYSE THEORIQUE

2.1. Caractéristiques de l'écoulement laminaire d'un fluide de Herschel-Bulkley

En régime dynamique établi, l'écoulement d'un fluide de Herschel-Bulkley est décrit par :

$$0 = -\frac{dP}{dz} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\tau) \quad (1)$$

où la contrainte τ est donnée par :

$$\tau = \tau_s - K \left| \frac{du}{dr} \right|^{n-1} \frac{du}{dr} \text{ si } \tau > \tau_s \quad (2a)$$

si $\tau \leq \tau_s$, le fluide n'est plus cisailé, soit :

$$\frac{du}{dr} = 0. \quad (2b)$$

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$u(r=R) = 0 \quad \text{et} \quad du/dr(r=R_c) = 0. \quad (3)$$

R_c désigne le rayon de la zone plastique où l'écoulement n'est pas cisailé ($du/dr = 0$).

L'intégration de l'équation (1) compte-tenu de (2) et (3) donne :

$$u(r) = \frac{R}{m+1} \left(\frac{\tau_p}{K} \right)^m (1-a)^{m+1} \left[1 - \left(\frac{r-a}{R-a} \right)^{m+1} \right] \quad \text{pour } \tau > \tau_s \quad (4)$$

avec $a = R_c/R = \tau_s/\tau_p$ et $m = 1/n$. La vitesse maximale, qui est la vitesse de déplacement du corps plastique, est :

$$u_{\max} = \frac{R}{m+1} \left(\frac{\tau_p}{K} \right)^m (1-a)^{m+1}. \quad (5)$$

En introduisant la vitesse débitante U_d , on aboutit à :

$$\frac{u(r)}{U_d} = \frac{1 - \left(\frac{r-a}{R-a} \right)^{m+1}}{\omega} \quad \text{et} \quad \frac{u_{\max}}{U_d} = \frac{1}{\omega}. \quad (6)$$

ω est défini par :

$$\omega = 1 - 2 \left[\frac{(1-a)^2}{m+3} + \frac{a(1-a)}{m+2} \right]. \quad (7)$$

Le gradient pariétal de vitesse rapporté à celui qu'on obtiendrait pour un fluide Newtonien au même débit est donné par :

$$\frac{\dot{\gamma}_p}{(\dot{\gamma}_p)_{\text{new}}} = \frac{1}{4\omega} \frac{m+1}{1-a}. \quad (8)$$

Or, $1/a = \tau_p/\tau_s$ et $\tau_p = \tau_s + K(\dot{\gamma}_p)^n$. Ainsi :

$$\frac{(1-a)^{n+1}}{a} = \frac{K \left(\frac{U_d}{R} \right)^n}{\tau_s \omega^n} (m+1)^n = \frac{1}{Hb} \left(\frac{m+1}{\omega} \right)^n \quad (9)$$

où Hb est le nombre de Herschel-Bulkley ou de Bingham généralisé, qui traduit l'importance de la contrainte seuil par rapport à la contrainte visqueuse nominale.

$$Hb = \frac{\tau_s}{K \left(\frac{2U_d}{D} \right)^n}. \quad (10)$$

L'équation (9) montre que la dimension relative du corps plastique est fonction du nombre d'Herschel-Bulkley, Hb , et de l'indice de structure n . Les résultats de la résolution de (9) sont représentés sur la Fig. 1. Le nombre de Herschel-Bulkley est porté en ordonnée, et l'inverse de l'indice de structure, m , en abscisse. Les courbes correspondent à des isovaleurs de $a = R_c/R$. Ainsi, si nous connaissons les paramètres rhéologiques n , K , τ_s ainsi que la vitesse débitante et le diamètre de la conduite, le diagramme (Fig. 1) nous donnera la dimension du corps plastique. La Fig. 2 donne le gradient pariétal de vitesse rapporté à celui qu'on obtiendrait au même débit pour un fluide Newtonien, en fonction du nombre de Herschel-Bulkley et pour différentes valeurs de $m = 1/n$. Elle montre que le gradient pariétal de vitesse croît avec m et Hb . En outre, l'effet de Hb est d'autant plus important que l'indice de structure n est faible. Lorsque Hb tend vers zéro, le gradient pariétal de vitesse tend asymptotiquement vers la valeur qu'on obtiendrait pour un fluide pseudoplastique, soit $(3n+1)/4n$.

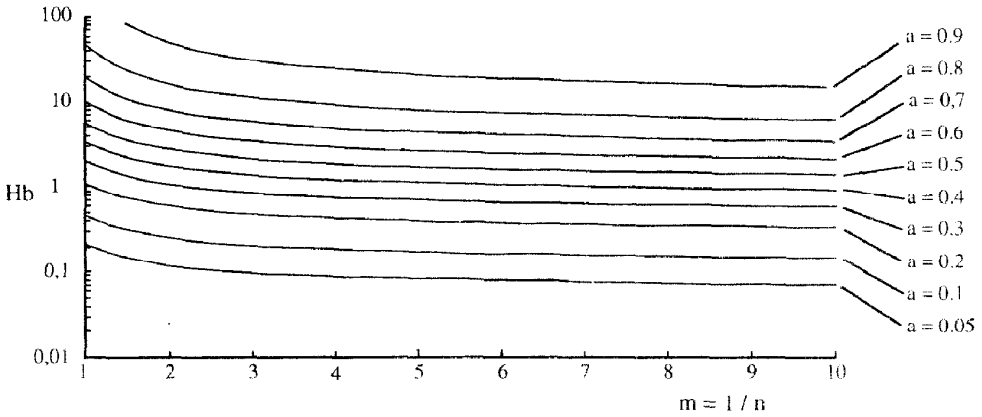


FIG. 1. Diagramme pour la détermination du rayon a , du corps plastique.

2.2. *Transfert de chaleur dans la région d'entrée d'une conduite pour un fluide de Herschel-Bulkley. Cas de propriétés physiques constantes*

L'analyse de la convection thermique pour un fluide de Herschel-Bulkley dans la région d'entrée d'une conduite, en supposant les propriétés physiques constantes, permet de déterminer le facteur correctif, $Nu_{n,m}/Nu_{n=1,m=0}$, qui tient compte de la modification du cisaillement pariétal due aux propriétés rhéologiques.

Le régime dynamique est supposé établi à l'entrée de la zone de chauffage. L'équation de l'énergie se réduit à :

$$\rho C_p u \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (11)$$

avec

$$\begin{aligned} T(r, z = 0) &= T_c \\ \frac{\partial T}{\partial r}(r = 0, z) &= 0 \quad \text{pour } z \geq 0 \\ \frac{\partial T}{\partial r}(r = R, z) &= \phi_p / \lambda \quad \text{pour } z \geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

En introduisant les paramètres adimensionnels suivants :

$$X^+ = \frac{2z/D}{Pe} ; \quad U = \frac{u}{U_d} ; \quad \eta = \frac{r}{R} ; \quad \theta = \frac{T - T_c}{\phi_p D / \lambda} \quad (13)$$

où X^+ est appelé nombre de Caméron, l'équation de l'énergie devient :

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X^+} = 2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \quad (14)$$

avec :

$$\begin{aligned} \theta(\eta, 0) &= 0 \quad \text{pour } 0 \leq \eta \leq 1 \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta}(0, X^+) &= 0 \quad \text{pour } X^+ \geq 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta}(1, X^+) &= 1/2 \quad \text{pour } X^+ \geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

L'équation (14) est résolue par une méthode aux différences finies, où le terme de diffusion est traité par un schéma centré et le terme de convection par un schéma décentré à l'ordre 1. La vitesse U est donnée par l'équation (6). Les résultats sont présentés sur la Fig. 3, qui indique l'évolution du nombre de Nusselt $Nu = 1/(\theta_n - \theta_m)$ en fonction du nombre de Caméron X^+ , pour différentes valeurs de n et de Hb . Elle montre que, pour une valeur de n fixée (exemple $n = 1$), l'aug-

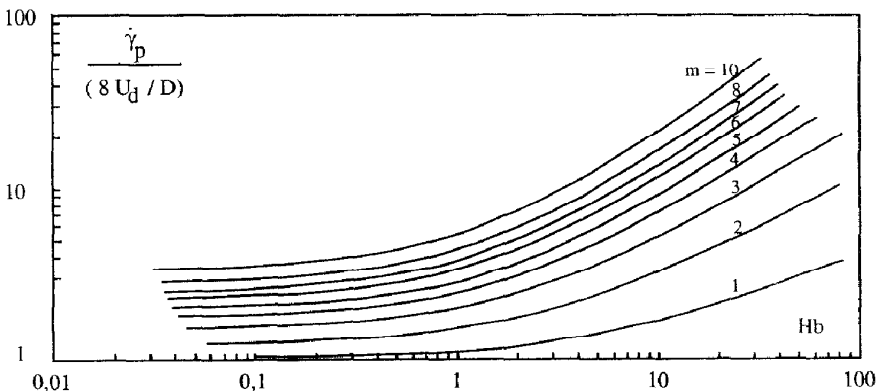


FIG. 2. Gradient pariétal de vitesse adimensionnel en fonction de Hb et de m .

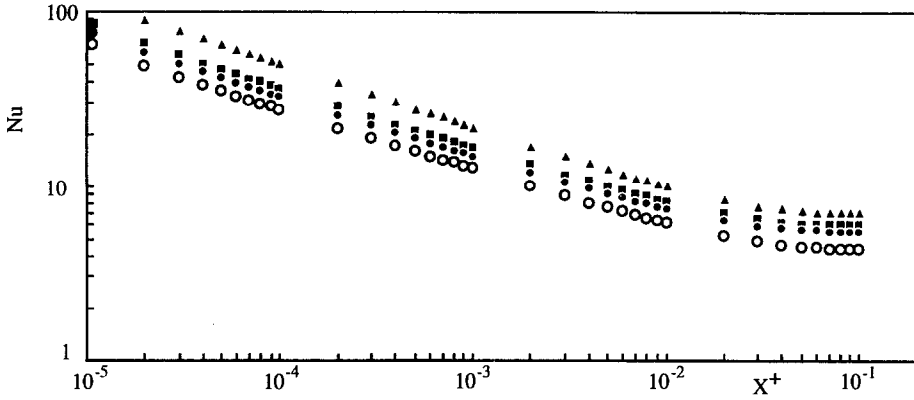


Fig. 3. Evolution du nombre de Nusselt local dans le cas où les propriétés physiques sont supposées constantes pour différentes valeurs de n et de Hb : \circ , $n = 1$, $Hb = 0$; \bullet , $n = 1$, $Hb = 10$; \blacksquare , $n = 0,5$, $Hb = 5$; \blacktriangle , $n = 0,25$, $Hb = 10$.

mentation de Hb s'accompagne d'une amélioration du nombre de Nusselt; de même, pour une valeur de Hb fixée, la diminution de l'indice de structure n s'accompagne d'un accroissement de Nu (exemple $Hb = 10$ et $n = 1-0,25$). Cette amélioration est évidemment liée à une augmentation du cisaillement pariétal (Fig. 2).

Pour les fluides pseudoplastiques, Mizushina *et al.* [12] ont suggéré une correction du nombre de Nusselt par rapport au cas Newtonien. Cette correction se présente sous la forme d'un facteur qui est égal à $\Delta^{1/3}$, où $\Delta = (3n+1)/4n$ est le gradient pariétal de vitesse rapporté à celui qu'on obtiendrait pour un fluide Newtonien à même débit. Joshi et Bergles [14] ont indiqué que cette correction est valable sur toute la longueur d'entrée thermique, avec un écart maximal de 2% obtenu pour $n = 0,25$. Ceci nous amène donc à examiner pour les fluides de Herschel–Bulkley, la possibilité d'une correction par $\Delta^{*1/3}$, où Δ^* est donnée par l'équation (8), ainsi que ses limites de validité suivant le nombre de Caméron. Pour cela, nous avons

représenté sur la Fig. 4, le nombre de Nusselt rapporté à celui qu'on obtiendrait pour un fluide Newtonien en fonction du nombre de Caméron, et pour différentes valeurs de n et de Hb .

Pour des valeurs de n comprises entre 1 et 0,5, le rapport $Nu_{n,Hb}/Nu_{n=1,Hb=0}$ augmente faiblement lorsque X^+ passe de 10^{-5} à 10^{-3} . Ainsi pour $n = 1$ et $Hb = 5$ le rapport varie de 5% lorsque X^+ varie de 10^{-5} à 10^{-1} et de 6% dans le cas où $n = 1$ et $Hb = 10$. Par contre lorsque n est compris entre 0,2 et 0,5, le rapport diminue lorsque X^+ varie de 10^{-5} à 10^{-2} et augmente par la suite. Ainsi dans le cas où $n = 0,25$ et $Hb = 10$, la diminution est de 16%. Ces résultats montrent clairement que la correction due à la modification du cisaillement pariétal évolue le long de la conduite. Une comparaison avec $\Delta^{*1/3}$, pour n compris entre 0,2 et 1 et Hb compris entre 1 et 10, indique un écart maximal de 2% pour $X^+ = 10^{-5}$. Cet écart augmente évidemment lorsque X^+ croît. Par conséquent l'utilisation d'un facteur correctif égal à $\Delta^{*1/3}$ doit être considérée avec précaution.

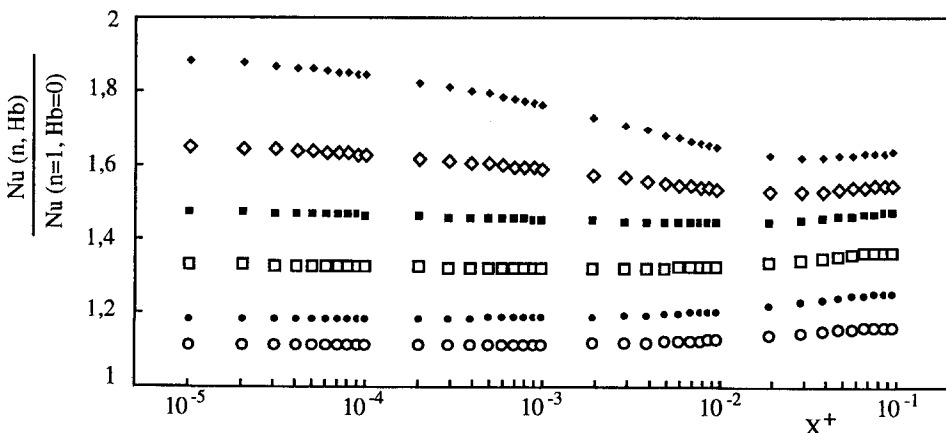


Fig. 4. Evolution du nombre de Nusselt rapporté au nombre de Nusselt Newtonien en fonction du nombre de Caméron pour différentes valeurs de n et de Hb : \circ , $n = 1$, $Hb = 5$; \bullet , $n = 1$, $Hb = 10$; \square , $n = 0,5$, $Hb = 5$; \blacksquare , $n = 0,5$, $Hb = 10$; \diamond , $n = 0,25$, $Hb = 5$; \blacklozenge , $n = 0,25$, $Hb = 10$.

3. DISPOSITIF EXPERIMENTAL ET TECHNIQUES DE MESURE

3.1. Description du dispositif expérimental

Les essais expérimentaux ont été effectués sur la même installation que celle utilisée par Scirocco *et al.* [17]. La veine d'essai se compose de deux parties. La première partie, rectiligne de diamètre $D = 0,03$ m, possède une longueur de 70 diamètres, suffisante pour assurer l'établissement complet du régime dynamique. En effet, d'après Froishteter et Vinogradov [22], la longueur d'entrée L_c peut être approximée par la relation suivante :

$$L_c / R Re_g = 0,23 m^{0,33} - 0,4a; \quad \text{avec } Re_g = \rho \frac{U_d^2}{K} R^a$$

Ainsi, pour la plus grande valeur du nombre de Reynolds considérée dans nos essais, soit $Re_g = 69$, qui correspond d'ailleurs à la plus faible dimension du corps plastique, $a = 0,13$, la longueur d'entrée n'est que de 8 diamètres.

La deuxième partie est la zone chauffée. Elle est constituée de six tubes en cuivre de diamètre 0,03 m et de longueur 0,36 m, sur lesquels a été bobiné un fil coaxial chauffant. Vingt cinq thermocouples ont été répartis à la surface de ces six tubes. L'isolation thermique est assurée par une couche d'air sec et par une enveloppe en polyméthacrylate de méthyle. En fin de zone de chauffage est placé un élément de conduite transparent permettant la mise en oeuvre de la vélocimétrie laser.

3.2. Fluide de travail

Le fluide utilisé est une solution aqueuse d'un polymère de l'acide acrylique (Carbopol 940 fabriqué par BF Goodrich). Ce polymère possède une masse moléculaire élevée : $2,4 \times 10^6$ g mole⁻¹ et une grande polydispersité. La solution de pH = 3,8 est ramenée à un pH voisin de 7 par neutralisation à l'aide d'une solution de soude. La neutralisation du Carbopol 940 s'accompagne d'un processus de gélification. Cette transition sol-gel a pour origine un déploiement des longues chaînes qui constituent ce polymère et c'est seulement par effet d'encombrement et d'enchevêtrement de ces longues chaînes déployées que le gel parvient à se structurer [23], ce qui permet d'expliquer la faible force de cohésion du gel de Carbopol 940, réputé pour se prêter à l'agitation et au pompage. Au delà de la phase de neutralisation, c'est à dire pour un pH > 8, les forces de répulsion entre les chaînes moléculaires fortement chargées deviennent prépondérantes et nous assistons à une destruction du gel. Finalement, trois zones peuvent être distinguées : (i) pour un pH inférieur à 5, la solution est dans un état de prégélification ; (ii) pour un pH compris entre 5 et 8, la solution se présente sous forme d'un gel et enfin (iii) pour un pH supérieur à 8 commence la désorganisation du gel.

Ce fluide a été choisi pour nos essais, car il possède

les propriétés d'être réversible, transparent, non toxique et peut garder son homogénéité sous l'action de grandes déformations. Trois concentrations de Carbopol ont été utilisées : 0,1, 0,15 et 0,3% en poids. Les solutions sont préparées à partir d'une eau déminéralisée à laquelle est ajouté un conservateur (formol à 0,1%), destiné à limiter la dégradation bactériologique du produit.

La caractérisation rhéologique du fluide a été effectuée sur un rhéomètre rotatif (CARRIMED) du type cône-plan, à contrainte imposée. La Fig. 5 montre, dans le cas d'une solution de Carbopol à 0,1%, l'évolution de la contrainte en fonction du cisaillement pour quatre températures : 13, 20, 35 et 50°C. Il apparaît qu'une loi du type $\tau = \tau_c + K\dot{\gamma}^m$ peut être adoptée dans une large gamme de taux de cisaillement ($10 \leq \dot{\gamma} \leq 1300$ s⁻¹). La détermination de la contrainte seuil nécessite quelques précautions. En effet, elle pourrait être liée à la sensibilité du dispositif. En outre, d'après Magnin et Piau [24] et Kouaméla [25], un glissement de fluide peut apparaître aux faibles vitesses de cisaillement. Pour nos essais, à cisaillement pariétal assez fort, le glissement est évité et les paramètres rhéologiques ont été déterminés sur la gamme de cisaillement qui offre le meilleur coefficient de corrélation pour une loi du type Herschel-Bulkley. Cette position est acceptable dans la mesure où le transfert thermique est gouverné par le gradient pariétal de vitesse, l'évolution de la loi de comportement rhéologique lorsque $\dot{\gamma}$ tend vers zéro n'influe que faiblement sur l'allure des profils de vitesse axiale.

Les variations des paramètres rhéologiques (contrainte seuil τ_c , consistance K et indice de structure m) en fonction de la température, pour les trois solutions de Carbopol à 0,1% en poids, font apparaître que le fluide est thermodépendant essentiellement par sa consistance K . La contrainte seuil varie très faiblement avec la température ; quant à l'indice de structure m , il augmente légèrement avec la température. L'indépendance de la contrainte seuil vis à vis de la température dans la gamme examinée peut être expliquée par le fait qu'elle est essentiellement liée à l'enchevêtrement des chaînes déployées. La Fig. 6 montre l'évolution de la consistance K en fonction de la température, en coordonnées semi-logarithmiques, pour les trois concentrations utilisées. Elle peut être décrite par une relation du type $K = K_0 \exp(-bT)$. La thermodépendance du fluide est caractérisée par le paramètre b . Ce dernier diminue avec la concentration, il est égal à 0,014, 0,0103 et 0,009 C⁻¹ respectivement pour des solutions à 0,1, 0,15 et 0,3%. Dans le cas de l'eau et si on décrit la variation de la viscosité par une loi similaire à celle de la consistance K , on trouve b (eau) = 0,02 lorsque T est compris entre 15°C et 50°C. La décroissance de la thermodépendance de la solution lorsque la concentration en Carbopol augmente, est probablement liée à une augmentation des contacts polymère-polymère et donc à un plus grand enchevêtrement.

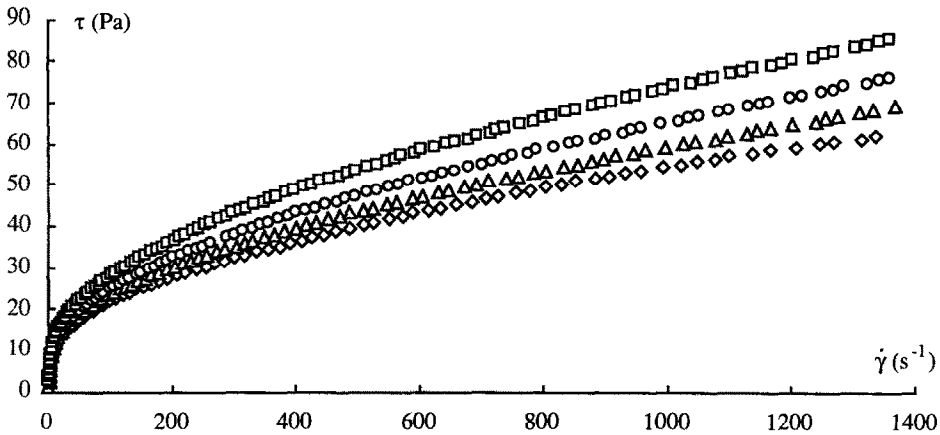


FIG. 5. Rhéogrammes représentant l'évolution de la contrainte de cisaillement avec le gradient de vitesse pour une solution de Carbopol 940 à 0,1% en poids, à différentes températures: \square , $T = 13^\circ\text{C}$; \circ , $T = 20^\circ\text{C}$; \triangle , $T = 35^\circ\text{C}$; \diamond , $T = 50^\circ\text{C}$.

4. RESULTATS ET DISCUSSIONS

4.1. Profils de vitesse isothermes et validation des lois rhéologiques

De manière à valider les paramètres rhéologiques déterminés par ailleurs pour les solutions de Carbopol utilisées, les vitesses axiales mesurées sont comparées avec celles évaluées théoriquement à l'aide de ces mêmes paramètres.

Les vitesses données par le vélocimètre laser sont en fait une moyenne spatiale sur toute la longueur du volume de mesure. Dans les zones cisailées, notamment au voisinage de la paroi, les gradients de vitesse sont très importants; il en résulte que la vitesse mesurée ne correspond pas à celle au centre du volume de mesure. Une correction a donc été effectuée, selon l'expression suivante [26]:

$$u_{\text{corrigée}} \approx u_{\text{mesurée}} - \frac{1}{3} \frac{(\dot{\gamma}l)^2}{u_{\text{mesurée}}}$$

où l désigne la longueur du volume de mesure qui, dans notre cas, est égale à 0,5 mm. Cette correction n'a de sens que si $\dot{\gamma}l/u_{\text{mesurée}} \ll 1$. Dans la pratique, le gradient de vitesse $\dot{\gamma}$, qui est inconnu, est déterminé à partir de la courbe expérimentale.

Un exemple de profil de vitesse axiale isotherme ($T = 17^\circ\text{C}$) mesuré dans le cas d'une solution de Carbopol à 0,1% en poids ($n = 0,5$; $K = 1,95 \text{ Pa s}^{-n}$; $\tau_s = 7 \text{ Pa}$), avec un débit de $8,8 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ est représenté, après correction, sur la Fig. 7. L'écart maximal entre le profil expérimental et le profil théorique déterminé avec les paramètres rhéologiques donnés ci-dessus est de 3%. Ce résultat très satisfaisant valide donc les valeurs des paramètres n , K et τ_s .

L'influence du nombre de Herschel-Bulkley sur la dimension du corps plastique est mise en évidence sur la Fig. 8. Cette zone subit un rétrécissement au fur et à mesure que Hb diminue, comme cela est d'ailleurs

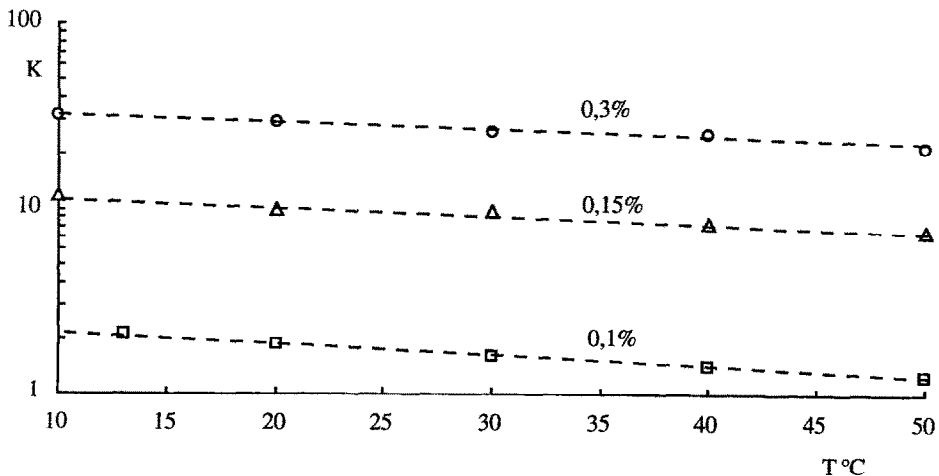


FIG. 6. Evolution de la consistance K avec la température, pour trois concentrations de Carbopol 940: \circ , 0,3%; \triangle , 0,15%; \square , 0,1%.

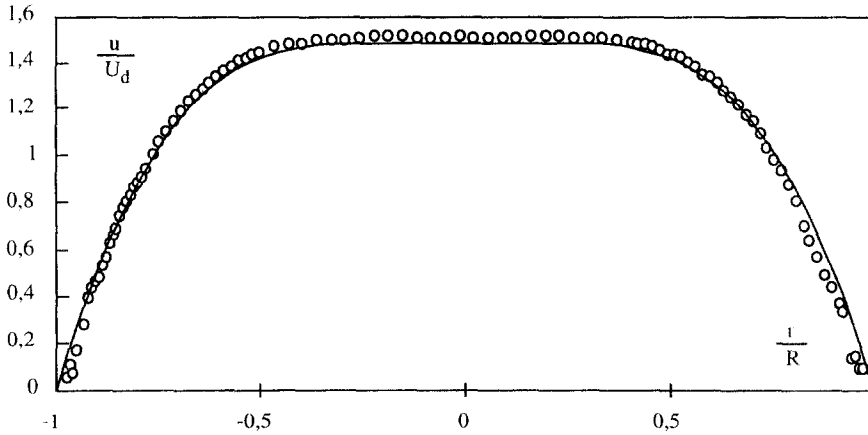


Fig. 7. Comparaison des profils de vitesse théorique et expérimental.

indiqué sur le diagramme de la Fig. 2. On constate néanmoins qu'il est très difficile de déterminer le rayon du corps plastique sur les profils de vitesse.

4.2. Profils de vitesse axiale en situation de chauffage

La diminution de la consistance K du fluide lorsque la température croît conduit à une augmentation de la vitesse axiale au voisinage de la paroi chauffée (Fig. 9) et donc, par conservation du débit, à une diminution de la vitesse du corps plastique. Ce résultat a déjà été signalé par plusieurs auteurs [16–21]. La Fig. 9 montre aussi une augmentation de la dimension a de la zone plastique. Ce qui entraîne une décroissance de la contrainte pariétale dans la mesure où $a = R_c/R = \tau_s/\tau_p$. On a remarqué en effet lors du chauffage du fluide, que les mesures de pression [21], indiquent une diminution de la perte de charge et donc du frottement pariétal. Il apparaît donc que la diminution de la consistance K a un effet plus important que l'accroissement du gradient pariétal de vitesse.

4.3. Etude du coefficient de transfert de chaleur dans la zone d'entrée

Le transfert de chaleur entre la paroi chauffée et le fluide en mouvement est caractérisé par le groupement adimensionnel de Nusselt :

$$Nu(z) = h(z)D/\lambda_f(z) = (\phi_p/(T_p(z) - T_m(z)))(D/\lambda_f(z))$$

où T_m est la température de mélange dans la section considérée, calculée par un bilan thermique, et λ_f la conductivité thermique évaluée à la température du film T_f . Pour une position axiale donnée, le coefficient d'échange est gouverné essentiellement par le gradient pariétal de vitesse. Ce dernier est fonction des valeurs du couple (n, Hb) et de la densité de flux de chaleur appliquée à la paroi.

Des essais en transfert de chaleur ont été effectués pour les trois solutions de Carbopol et à différents débits. Pour chaque débit, plusieurs densités de flux de chaleur ont été testées.

4.3.1. Influence de la densité de flux de chaleur

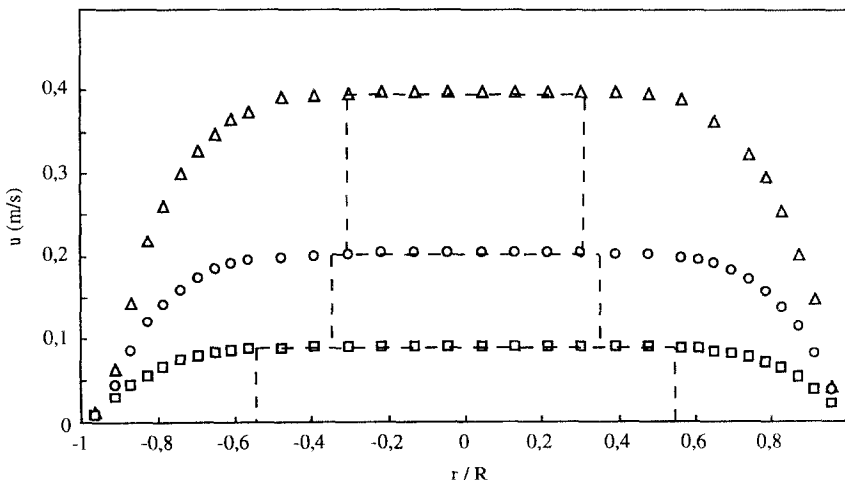


Fig. 8. Influence du nombre d'Herschel-Bulkley sur le profil de vitesse axiale: Δ , $n = 0,47$, $Hb = 1,1$; \circ , $n = 0,47$, $Hb = 1,48$; \square , $n = 0,47$, $Hb = 2,16$.

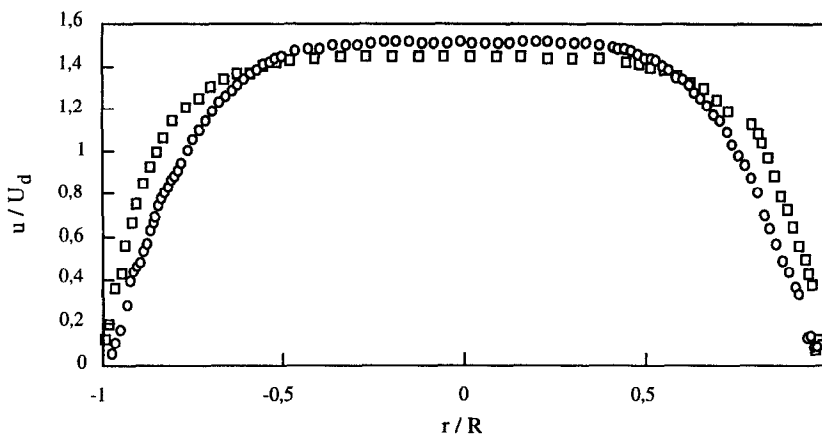


FIG. 9. Effet du chauffage sur le profil de vitesse axiale ($n = 0,5$; $Hb_c = 1,27$): \circ , $\phi_p = 0 \text{ W m}^{-2}$; \square , $\phi_p = 10204 \text{ W m}^{-2}$.

pariétale. La Fig. 10 donne une représentation de l'évolution du nombre de Nusselt, en fonction du nombre de Cameron X^+ et paramétrée par la densité de flux de chaleur ϕ_p , dans le cas d'une solution de Carbopol à 0,1% ($n = 0,5$), et pour un nombre de Herschel-Bulkley, calculé à la température d'entrée, égal à 1,27. Nous constatons une augmentation du nombre de Nusselt avec la densité de flux de chaleur ϕ_p . Cette augmentation est liée à la réorganisation de l'écoulement avec transfert de matière vers la paroi chauffée et accroissement du cisaillement pariétal. La thermodépendance peut être caractérisée en introduisant le groupement adimensionnel, $b\phi_p D/2\lambda$ [14, 16, 17-20]. En effet, en rapportant le nombre de Nusselt à la quantité $(b\phi_p D/2\lambda)^2$, il est possible de regrouper les courbes de la Fig. 10 en une seule. L'exposant trouvé est égal à 0,1, 0,13 et 0,16 pour des solutions de Carbopol de concentrations respectivement égales à 0,3%, 0,15% et 0,1%.

Naïmi *et al.* [20], pour une solution de Carbopol à 0,2% et dans le cas d'une géométrie annulaire, trou-

vent un exposant égal à 0,1 pour un écoulement de Poiseuille, et 0,16 pour un écoulement de type Couette-Poiseuille, lorsque la zone plastique a disparu. Ces résultats sont en accord, au moins qualitativement, avec ceux que nous avons obtenus en conduite cylindrique, où l'exposant augmente lorsque la concentration diminue, et donc lorsque a décroît. La présence d'une zone plastique limite le développement de la composante radiale de la vitesse et donc l'effet de thermodépendance.

4.3.2. *Influence du nombre de Herschel-Bulkley.* Pour tous nos essais expérimentaux, le nombre de Herschel-Bulkley varie de 0,42 à 1,85. Ces valeurs extrêmes 0,42 et 1,85 ont été obtenues respectivement pour une solution de Carbopol à 0,1% avec un débit de $7,73 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ et une solution à 0,3% avec un débit de $1,08 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Il est difficile d'étendre d'avantage cette gamme du fait que d'une part, pour les trois solutions utilisées l'indice de structure varie peu (0,46-0,5) et d'autre part, l'augmentation de la concentration s'accompagne simultanément d'une

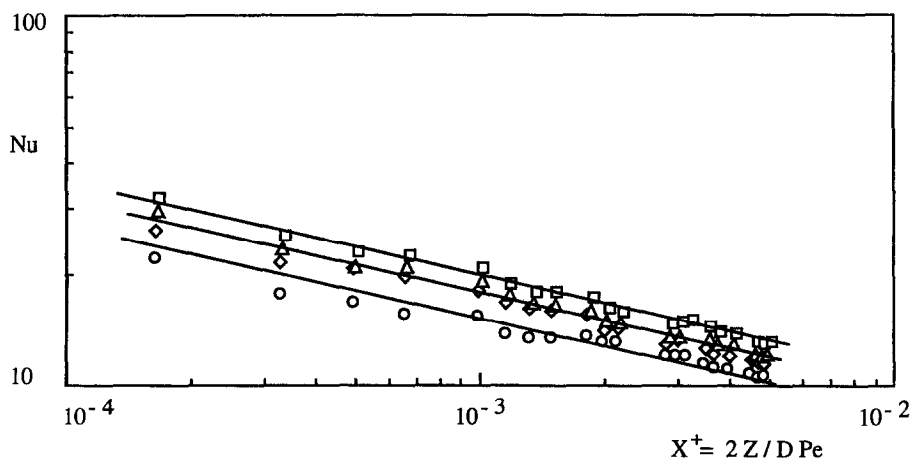


FIG. 10. Evolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Cameron X^+ , pour différentes valeurs de la densité de flux de chaleur ($n = 0,5$; $Hb_c = 1,27$): \circ , $\phi_p = 2014 \text{ W m}^{-2}$; \diamond , $\phi_p = 4028 \text{ W m}^{-2}$; \triangle , $\phi_p = 5970 \text{ W m}^{-2}$; \square , 10024 W m^{-2} .

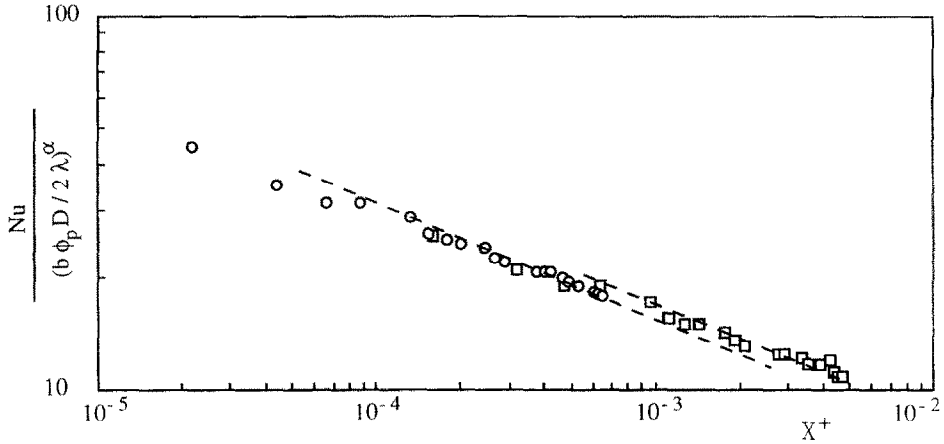


FIG. 11. Evolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Caméron X^+ pour deux valeurs différentes du nombre de Herschel-Bulkley : \circ , $n = 0.46$, $Hb = 1.85$; \square , $n = 0.5$, $Hb = 0.42$.

augmentation de la contrainte seuil et de la consistance K .

Pour les deux valeurs extrêmes de Hb , nous avons représenté, sur la Fig. 11, l'évolution du nombre de Nusselt rapporté au groupement adimensionnel $(b\phi_p D/2\lambda)^\alpha$ en fonction du nombre de Caméron X^+ . En traits pointillés, nous avons tracé l'allure des courbes pour mettre en exergue l'effet du nombre d'Herschel-Bulkley. L'écart entre les deux courbes est de 8%, et il est dû à une modification du cisaillement pariétal. L'analyse théorique (Section 2.2) montre que pour les valeurs de n et de Hb considérées, une correction du nombre de Nusselt par $(\Delta^*)^{1/3}$ permet de tenir compte de la variation du gradient pariétal de vitesse sur toute la longueur de la conduite avec une erreur maximale de 1%. La Fig. 12 montre qu'effectivement une telle correction permet de corréler l'effet de Hb .

4.3.3. *Corrélation proposée.* L'ensemble des résultats expérimentaux concernant les trois concentrations de Carbopol, 0,1, 0,15 et 0,3%, soit plus de trois cents cinquante points (>350) sont présentés sur la Fig.

13. Elle donne le nombre de Nusselt rapporté au groupement adimensionnel de thermodépendance $(b\phi_p D/2\lambda)^\alpha$ et au facteur correctif du gradient pariétal $(\Delta^*)^{1/3}$, en fonction de la position axiale adimensionnelle X^+ . La corrélation proposée est :

$$Nu = 2.3 \left(\frac{b\phi_p D}{2\lambda} \right)^\alpha (\Delta^*)^{1/3} (X^+)^{-0.26};$$

$$\text{pour } 3 \times 10^{-5} < X^+ < 7 \times 10^{-3}$$

avec α égal à 0,1, 0,13 et 0,16 respectivement pour des concentrations de 0,3, 0,15 et 0,1%. Nous avons représenté en traits discontinus sur la Fig. 13 les corrélation proposées par Scirocco *et al.* [17] pour des solutions de C.M.C à 3% et des solutions de Gomme de Guar. Il est intéressant de remarquer que tous nos résultats expérimentaux sont compris entre ceux proposés pour les fluides pseudoplastiques dans la gamme des X^+ considérés. Nous notons cependant que pour les solutions de Carbopol, la pente est plus faible que pour les solutions de C.M.C et de Gomme de Guar (fluides pseudoplastiques). Cette diminution

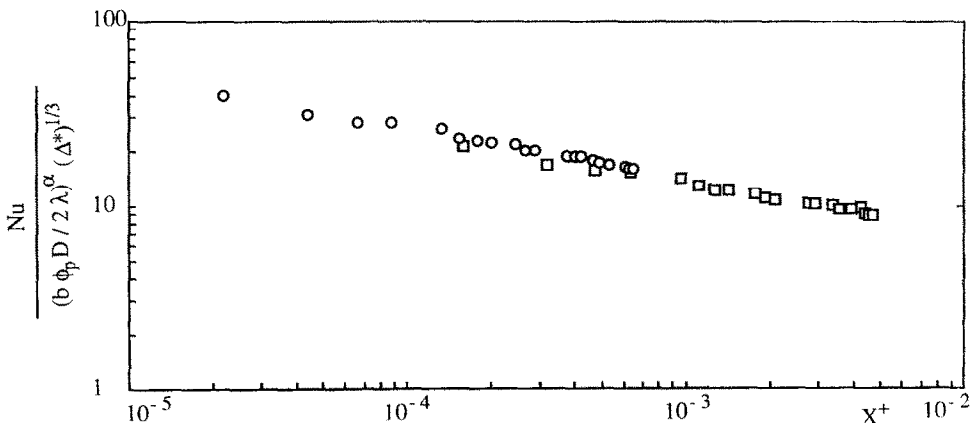


FIG. 12. Evolution du nombre de Nusselt rapporté au produit $(b\phi_p D/2\lambda)^\alpha (\Delta^*)^{1/3}$ en fonction du nombre de Caméron : \circ , $n = 0.46$, $Hb = 1.85$; \square , $n = 0.5$, $Hb = 0.42$.

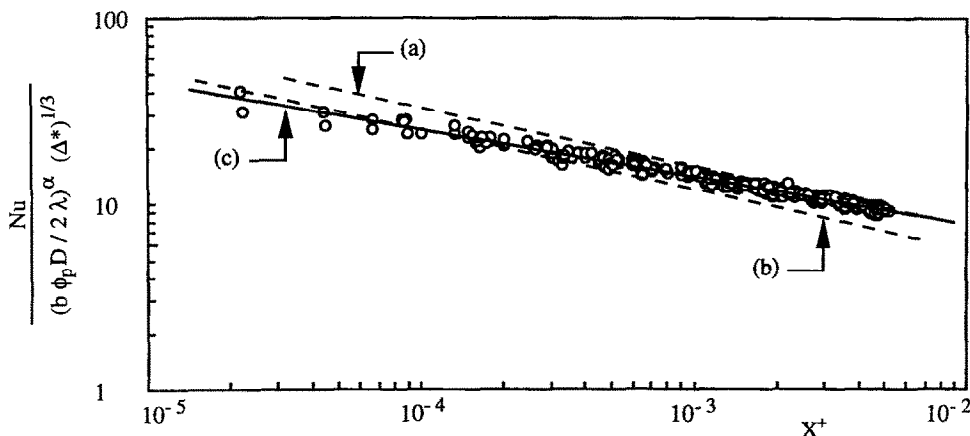


FIG. 13. L'ensemble de nos résultats expérimentaux : (a), corrélation proposée par Scirroco *et al.* [17] pour une solution de gomme de guar ; (b) corrélation proposée par Scirroco *et al.* [17] pour une solution de C.M.C à 3% ; (c) corrélation proposée pour les solutions de Carbopol utilisées.

de la pente peut être imputée à l'augmentation de la dimension de la zone plastique le long de la zone de chauffage. Ceci conduit corrélativement à un accroissement du nombre de Prandtl généralisé Pr_s , défini par :

$$Pr_s = \frac{KC_p}{4\lambda} \left(\frac{2U_d}{D} \right)^{n-1} \left[\frac{m+1}{(1-a)^{m+1}\omega} \right]^n$$

$$= \frac{KC_p}{4\lambda} \left(\frac{2U_d}{D} \right)^{n-1} \frac{Hb}{a}$$

à une plus faible évolution de la couche limite thermique.

5. CONCLUSION

Une étude théorique et expérimentale destinée à établir les caractéristiques de la convection thermique pour des fluides du type Herschel-Bulkley a été conduite.

La résolution de l'équation de l'énergie, en supposant le régime dynamique établi et les propriétés physiques constantes, a permis de déterminer le facteur correctif $Nu_{n,Hb}/Nu_{n=1,Hb=0}$, qui rend compte des conséquences de la modification du cisaillement pariétal par les propriétés rhéologiques. Il s'écarte de la correction 'classique' $\Delta^{*1/3}$ où Δ^* est le gradient pariétal de vitesse rapporté à celui qu'on obtiendrait pour un fluide Newtonien à même débit, de 1 à 16%. Cet écart est d'autant plus important que la valeur de n est faible et que celles de Hb et X^+ sont élevées.

Trois solutions de Carbopol (0,1, 0,15 et 0,3% en poids) ont été utilisées. L'étude rhéologique a permis de montrer qu'elles peuvent être décrites par une loi de comportement du type Herschel-Bulkley. La thermodépendance du fluide, caractérisée par la sensibilité de la consistance K vis à vis de la température, diminue lorsque la concentration de Carbopol croît.

Les profils de vitesse axiale ont été mesurés en situ-

ation isotherme et en situation de chauffage. Dans le premier cas, ils ont permis de valider les paramètres rhéologiques et de montrer un rétrécissement du corps plastique lorsque Hb diminue. Dans le deuxième cas, les profils de vitesse mettent en évidence une réorganisation de l'écoulement, caractérisée par un transfert radial de matière vers la paroi chauffée, ainsi qu'un accroissement de la dimension du corps plastique.

L'étude du coefficient de transfert de chaleur dans la zone d'entrée a montré que :

(a) La thermodépendance du fluide induit une amélioration du nombre de Nusselt : elle est décrite par le groupement adimensionnel $(b\phi_p D/2\lambda)^\alpha$.

(b) L'effet de la thermodépendance représenté par l'exposant α , est d'autant plus faible que la dimension du corps plastique est importante. Ceci traduit une atténuation de la diffusion de la chaleur dans le fluide. Cette interprétation permet d'expliquer les résultats obtenus par plusieurs auteurs dans le cas des fluides pseudoplastiques thermodépendants.

(c) Pour les valeurs de n et de Hb ($0,46 \leq n \leq 0,5$ et $0,42 \leq Hb \leq 1,85$) rencontrées dans nos essais expérimentaux, une correction du cisaillement pariétal par $\Delta^{*1/3}$ est satisfaisante.

(d) Du fait de la thermodépendance, le chauffage du fluide conduit à une augmentation de la dimension du corps plastique. Ceci a pour conséquence, une plus faible évolution de la couche limite thermique.

Finalement, tous les résultats expérimentaux sont décrits par une corrélation unique, qui se trouve intermédiaire entre celles proposées par Scirroco *et al.* [17] pour deux fluides pseudoplastiques, solution de C.M.C à 3% et solution de Gomme de Guar.

REFERENCES

1. B. C. Lyche and R. B. Bird, The Graetz-Nusselt problem for a power law non-Newtonian fluid, *Chem. Engng Sci.* 6, 35-91 (1956).

2. I. R. Whiteman and W. E. Drake, Heat transfer to flow in a round tube with arbitrary velocity distribution, *Trans. ASME* **80**, 728–732 (1958).
3. R. L. Pigford, Non-isothermal flow and heat transfer inside vertical tubes, *Chem. Engng Prog. Symp., Ser. No. 17* **51**, 79–92 (1955).
4. S. S. Kutateladze, Ye. M. Khabakhpasheva, V. I. Popov, I. M. Gruzdeva and B. V. Perepelitsa, Hydraulic resistance and heat transfer in stabilized flow of non-Newtonian fluids, *Heat Transfer—Sov. Res.* **2**(6), 114–123 (1970).
5. E. Hirai, Theoretical explanation of heat transfer in the laminar region of a Bingham fluid, *A.I.Ch.E. Jl* **5**, 130–133 (1959).
6. E. H. Wissler and R. S. Schechter, The Graetz–Nusselt problem (with extension) for a Bingham plastic, *Chem. Engng Prog. Symp., Ser. No. 29* **55**, 203–208 (1959).
7. T. Lin and V. L. Shah, Numerical solution of heat transfer to yield power law fluids flowing in the entrance region, *Proceedings of the Sixth International Heat Transfer Conference*, Vol. 5, pp. 317–322, Toronto (1978).
8. A. B. Chandrupatla and V. M. K. Sastri, Constant wall temperature entry length laminar flow of and heat transfer to a non-Newtonian fluid in a square duct, *Proceedings of the Sixth International Heat Transfer Conference*, Vol. 5, pp. 323–328, Toronto (1978).
9. A. B. Metzner, R. D. Vaughn and G. L. Houghton, Heat transfer to non-Newtonian fluids, *A.I.Ch.E. Jl* **3**(1), 92–100 (1957).
10. A. A. McKillop, J. C. Harper, H. J. Bader and A. Y. Korayem, Variable viscosity entrance-region flow of non-Newtonian liquids, *Int. J. Heat Mass Transfer* **13**, 901–909 (1970).
11. G. Forrest and W. L. Wilkinson, Laminar heat transfer to temperature-dependent Bingham fluids in tubes, *Int. J. Heat Mass Transfer* **16**, 2377–2391 (1973).
12. T. Mizushima, R. Ito, Y. Kuriwake and K. Yahikazawa, Boundary layer heat transfer in a circular tube to Newtonian and non-Newtonian fluids, *Kagaku-Kogaku* **31**, 250–255 (1967).
13. S. D. Joshi and A. E. Bergles, Experimental study of laminar heat transfer to in tube flow of non-Newtonian fluids, *J. Heat Transfer* **102**, 397–401 (1980).
14. S. D. Joshi and A. E. Bergles, Analytical study of heat transfer to laminar in tube of non-Newtonian fluids, *A.I.Ch.E. Symposium Series No. 199* **76**, 270–279 (1980).
15. K. Kahine, V. T. Nguyen et M. Lebouché, Ecoulement et transfert de chaleur pour des fluides rhéofluidifiants thermodépendants, *Actes du Dixième Congrès Français de Mécanique*, Vol. 2, pp. 41–44, Paris (1991).
16. A. El Ouadighi, Etude numérique et expérimentale de l'écoulement et du transfert de chaleur pour des fluides non-Newtoniens thermodépendants en conduites industrielles, Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine (1990).
17. V. Scirocco, R. Devienne et M. Lebouché, Ecoulement laminaire et transfert de chaleur pour un fluide pseudo-plastique dans la zone d'entrée d'un tube, *Int. J. Heat Mass Transfer* **28**, 91–99 (1985).
18. C. Nouar, R. Devienne et M. Lebouché, Convection thermique pour l'écoulement de Couette avec débit axial, cas d'un fluide pseudoplastique, *Int. J. Heat Mass Transfer* **30**, 639–647 (1987).
19. P. Sourlier, Contribution à l'étude des propriétés convectives de fluides thermodépendants: Cas de l'écoulement en canal de section rectangulaire, Thèse de Doctorat de l'Université de Nancy I (1988).
20. M. Naïmi, R. Devienne et M. Lebouché, Etude dynamique et thermique de l'écoulement de Couette–Taylor–Poiseuille: Cas d'un fluide présentant un seuil d'écoulement, *Int. J. Heat Mass Transfer* **33**, 381–391 (1990).
21. I. Moudachirou, Transfert thermique et perte de charge pour un fluide de Herschel–Bulkley thermodépendant, Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine (1992).
22. G. B. Froishteter and G. V. Vinogradov, The laminar flow of plastic disperse systems in circular tubes, *Rheol. Acta* **19**, 239–250 (1980).
23. M. Alain, Le Carbopol 940: Caractérisation physico-chimique et processus de gélification, Thèse de Doctorat de l'Université de Montpellier I, Faculté de Pharmacie (1973).
24. A. Magnin and J. M. Piau, Shear rheometry of fluids with a yield stress, *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics* **23**, 91–106 (1987).
25. N. G. D. Kouaméla, Etude expérimentale des écoulements en charge de fluides à seuil, Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble (1991).
26. F. Durst, A. Melling and J. H. Whitelaw, *Principles and Practice of Laser-Doppler Anemometry*, Academic Press, New York (1976).

THERMAL CONVECTION FOR HERSCHEL–BULKLEY FLUID IN THE ENTRANCE REGION OF A DUCT

Abstract—The thermal convection for Herschel–Bulkley fluids in duct is studied, theoretically in the case of constant physical properties, and experimentally from wall temperature measurements. The results of the theoretical analysis show that the non-Newtonian correction depends on the flow behavior index n and on the Herschel–Bulkley number Hb . Velocity measurements for isothermal and heating situation, reveal the incidence of the imposed thermal field on the flow structure. It is characterized by an increase of shear rate at the wall, and of the size of the flowing plug. Temperature measurements permit the study of the local heat transfer. Finally a correlation is proposed taking into account the modification of the wall shear rate induced by the rheological properties, and the temperature dependent character of the fluid.